

*На правах рукописи*



Сидорова Оксана Игоревна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАФИКА  
В СОВРЕМЕННЫХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ  
СИСТЕМАХ

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Тверь — 2009

Работа выполнена на кафедре математической статистики и системного анализа факультета прикладной математики и кибернетики Тверского государственного университета.

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, профессор

Ю.С. Хохлов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор

В.Е. Бенинг

доктор физико-математических наук, профессор

А.И. Зейфман

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет

Защита состоится 22 мая 2009 г. в 14.00

на заседании диссертационного совета Д212.63.04 в Тверском государственном университете по адресу: 170000, Тверь, ул. Желябова, 33, ауд. 52.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке

Тверского государственного университета по адресу: 170000, Тверь, ул. Володарского, 44 а.

Объявление о защите диссертации и автореферат опубликованы на официальном сайте Тверского государственного университета по адресу:

<http://university.tversu.ru/aspirants/abstracts/>.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2009 г.

Ученый секретарь совета

доктор технических наук, профессор

В.Н. Михно

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** До середины 90-х годов 20 века оценки производительности компьютерных сетей осуществлялись с помощью стандартных методик, основанных на формулах Эрланга. Пока трафик состоял из небольших текстовых файлов, не требовавших значительных ресурсов для обслуживания, трудностей такой подход не вызывал, но по мере очень быстрого увеличения числа пользователей и усложнения структуры передаваемой информации это привело к серьезной недооценке реальной нагрузки и значительному ухудшению качества обслуживания ( $QoS$ ). Примером является сбой в сети  $AT\&T$  в 1990 году, когда на протяжении 9 часов она была недоступна большей части зданий Нью-Йорка, что вызвало большие финансовые потери. Требования к повышению  $QoS$  стимулировали развитие надежных систем с высокой устойчивостью к сбоям, что, резко повысило интерес к исследованию свойств нагрузки в современных компьютерных системах.

Исследования (M. Crovella et al., 1996; W. Leland et al., 1994) показали, что свойства компьютерного трафика кардинально отличаются от свойств трафика в «голосовых» системах, например телефонных сетях. Компьютерный трафик имеет *долгую память*, у распределений длин периодов занятости наблюдаются *тяжелые хвосты*, агрегированный процесс нагрузки является *самоподобным* (монофрактальным).

В таких условиях *вероятность переполнения буфера* с ростом его размера  $h$  убывает не по экспоненте, как в линейных системах массового обслуживания (СМО) с марковскими потоками, а степенным образом (S. Resnick et al., 1998; Б. Цыбаков и др., 1998–2001) или по закону Вейбула (I. Norros, 1994). Если для эффективного обслуживания «голосового» трафика буфер в ЗКБ (30 пакетов размера 100Б) более чем достаточен, вероятность переполнения в этом случае имеет порядок  $10^{-14}$ , то при степенном убывании вероятности переполнения в условиях сильной загрузки даже буфер в несколько ГБ не гарантирует для самоподобного трафика надежного обслуживания. Вероятности переполнения для самоподобного процесса с параметрами  $H = 0.85$  и  $H = 0.6$  и буфера размером 2ГБ ( $2 \cdot 10^7$  пакетов размера 100Б) по некоторым оценкам (модель Б.С. Цыбакова) имеют порядок  $10^{-4}$  и  $10^{-8}$  соответственно. Сегодня для стабильной работы СМО требуется, чтобы данная вероятность не превышала  $1 \cdot 10^{-9}$ .

СМО с самоподобным трафиком к настоящему времени хорошо изучены: для них описаны возможные предельные процессы для потоков нагрузки (Т. Mikosh et al., 1998-99) и получены оценки для ряда показателей  $QoS$ . Данные результаты являются важным шагом вперед в рамках анализа немарковских СМО, однако они не позволяют охватить все многообразие свойств трафика в современных условиях.

Широко используемые сегодня технологии обработки информации позволяют передавать по одному каналу трафик с разными требованиями к параметрам производительности системы, вследствие чего поток может быть крайне неоднородным. Исследования (M. Taqqu et al., 1997; A. Feldmann et al., 1998) показали, что самоподобие проявляется асимптотически, на крупных временных шкалах, а для малых периодов усреднения поведение трафика больше похоже на мультифрактал. СМО с

мультифрактальными потоками изучены слабо: основной вывод из нескольких работ, посвященных моделям трафика, порождаемого неоднородными источниками, состоит в том, что свойства трафика и параметры  $QoS$  определяются источниками с самым длинным активным периодом/«тяжелыми» заявками. Поведение трафика и параметров  $QoS$  в случае, когда «тяжелые» заявки приходят редко, а основную нагрузку порождают более «легкие» требования, практически не изучено. На первый взгляд наиболее очевидным в этой ситуации кажется определение размера буфера на основе потока с самыми «тяжелыми» заявками. Однако необоснованное увеличение размера буфера может не оказать желаемого влияния на СМО, так как выигрыш от уменьшения потерь информации, будет нивелирован из-за увеличения стоимости сетевой аппаратуры и ее обслуживания и ухудшения других параметров  $QoS$ , например, увеличения задержки при обработке информации в большом буфере.

Оптимизация затрат на создание и эксплуатацию сетей в сочетании с сохранением их высокой производительности и гарантированного качества обслуживания требует *повышения адекватности существующих моделей трафика и подходов оценке параметров  $QoS$ , поэтому выбранная для исследования тема является на сегодняшний день очень актуальной.*

**Цели и научные задачи.** Целью диссертации является разработка математических моделей трафика, отражающих мультифрактальное поведение потоков данных в реальных системах связи и исследование влияния мультифрактального трафика на асимптотическое поведение вероятности переполнения буфера.

Для достижения этой цели в работе решены научные задачи:

1. Построены математические модели входящих потоков: *неоднородная ON/OFF модель, неоднородная модель Пуассона в непрерывном и дискретном времени*, длины активных периодов источников в которых имеют распределения с правильно меняющимися хвостами с различными показателями  $1 < \alpha^{(k)} < 2, k = \overline{1, r}, r < \infty$ . Установлены условия, при которых источники любого типа нетривиально влияют на характеристики процесса нагрузки.

2. В *неоднородной ON/OFF модели* в режиме «Slow Growth Condition» (SGC) найден новый предельный процесс для агрегированного процесса нагрузки.

3. Найдено асимптотическое распределение случайной суммы независимых случайных слагаемых, имеющих конечное число различных распределений.

4. Доказано, что вероятность переполнения буфера в *неоднородной ON/OFF модели* и *неоднородной модели Пуассона в непрерывном времени* и асимптотические границы для вероятностей переполнения буфера и потери пакета в *неоднородной модели Пуассона в дискретном времени* убывают степенным образом с ростом размера буфера. Найдены условия при которых скорость убывания может совпадать с любым из  $\alpha^{(k)}, k = \overline{1, r}$ .

5. С помощью имитационного моделирования исследованы свойства асимптотических границ для вероятности переполнения буфера в *неоднородной модели Пуассона*

в дискретном времени.

**Методы исследования.** При получении теоретических результатов использовались методы теории вероятностей, теории случайных процессов и асимптотические методы математического анализа. Для проверки и уточнения полученных результатов использовалось имитационное моделирование.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. Модели входящих потоков, построенные с учетом того, что доли источников разных типов в общем потоке различны.

2. Асимптотическое распределение случайной суммы независимых случайных величин, имеющих конечное число разных распределений, найденное с помощью сведения суммы со случайным числом слагаемых к сумме с неслучайным числом слагаемых.

3. Асимптотика вероятности переполнения буфера в СМО с неоднородными потоками, отражающая вклад источников разных типов.

4. Методика построения имитационной модели, основанная на использовании методов ускорения симуляции, и ее применение для уточнения константы в оценке вероятности переполнения буфера.

**Научная новизна и теоретическая значимость.** Результаты диссертации развивают теорию массового обслуживания в классе систем с немарковскими входящими потоками. По сравнению с существующими подходами новые модели являются более гибкими, так как учитывают влияние разных компонент трафика на свойства всего потока и на характеристики его обслуживания. Асимптотическое распределение случайных сумм, найденное ранее для одинаково распределенных с.в., перенесено на случай, конечного числа различных распределений. Данный результат обеспечивает единый подход к анализу *ON/OFF модели* и *модели Пуассона с непрерывным временем* в однородном и неоднородном случае, в отличие от известных результатов для однородного случая, при получении которых ранее использовались разные методы. Полученная в рамках разработанных моделей трафика асимптотика для вероятностей переполнения буфера и потери пакета позволяет более адекватно оценивать потери информации и отказы в обслуживании.

**Практическая значимость.** Практическая значимость работы состоит в том, что результаты диссертации могут служить базой для численного анализа современных СМО с мультифрактальными входящими потоками и установления минимально необходимого размера буфера при проектировании новых систем связи.

**Достоверность и обоснованность** научных результатов базируются на корректном использовании вероятностно-статистических методов, теории случайных процессов и математического анализа. Все сформулированные теоретические положения имеют строгие математические доказательства. Достаточность и обоснованность полученных результатов также подтверждается методами имитационного моделирования.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на международном семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей (г. Юрмала, Латвия, 2004), (Салерно, Италия, 2005), на конференции «Ломоносовские чтения» (г. Москва, МГУ, 2005), на 31 международной конференции по стохастическим процессам и их применениям (г. Париж, Франция, 2006), на 5 международной конференции по процессам Леви (г. Копенгаген, Дания, 2007), на 13 Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (г. Йошкар-Ола, 2007), на научно-практической конференции «Моделирование и принятие решений в условиях неопределенности» (г. Тверь, ТвГУ, 2008).

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 12 работ, среди них — 3 в изданиях рекомендованных ВАК Минобрнауки России.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 155 листах, содержит 17 рисунков, 3 таблицы и список литературы, включающий 83 наименования.

### Краткое содержание работы

**Во введении** отражена актуальность выбранной темы, приведен обзор научной литературы, освещающий состояние проблемы, сформулированы цели и задачи исследования и положения, выносимые на защиту. Введение также содержит основные научные результаты с обоснованием их новизны и практической ценности и краткое содержание диссертационной работы.

**В первой главе** определен объект исследования, даны определения, вспомогательные понятия и описания моделей, приводящих к самоподобному трафику.

**В параграфе 1** описывается объект исследования и объясняются причины самоподобия трафика в современных системах связи.

В работе рассматривается некоторая цифровая сеть связи, состоящая из одного сервера (обслуживающего прибора, канала), на который поступает нагрузка от других узлов сети — пользователей. Предполагается, что сервер имеет буфер конечного размера, что является типичной ситуацией для современной системы связи в условиях сильной загрузки. Подобная модель рассматривается в литературе как базовая математическая модель маршрутизатора или коммутатора (Т. Neam, 2003), которая позволяет с достаточной степенью точности воспроизводить реальные процессы и, что очень важно, является доступной для анализа даже в случае потоков нагрузки с очень сложной структурой.

В цифровых системах все сообщения разбиваются на небольшие части — пакеты, каждый из которых передается получателю, где они вновь собираются в цельное сообщение. Мы не интересуемся конкретной природой передаваемой информации и процессом ее разбиения на пакеты. Исходная информация — поток пакетов, которые обычно сбиваются в так называемые «пачки». Потоки таких пачек между узлами связи называют *трафиком телекоммуникационной системы* в этой области знания. В реальных системах в зависимости от технологии передачи информации длина пакетов

может колебаться от 4Б до 1500Б. Мы рассматриваем стандартные пакеты, то есть одинаковые в смысле длины и времени обработки, которое с достаточной степенью точности можно считать неслучайной константой. Примером такой системы является сеть с *технологией асинхронной передачи данных (АТМ)*, в которой все пакеты имеют одинаковый размер 53Б и постоянное время обслуживания.

В параграфе 2 даются определения процессов с короткой и длинной памятью, распределений с тяжелыми хвостами, строго самоподобных, самоподобных в широком смысле и асимптотически самоподобных процессов непрерывного и дискретного аргумента. Приводятся определения дробного броуновского движения и  $\alpha$ -устойчивого движения Леви,  $0 < \alpha \leq 2$ .

**Определение 1.** Случайный процесс  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  называется *самоподобным*, если для любого  $a > 0$  существует  $b > 0$ , такое что  $X(at) \stackrel{d}{=} b^H X(t)$ .

Для невырожденного, стохастически непрерывного при  $t = 0$  самоподобного процесса  $X$ , такого что п.н.  $X(0) = 0$  существует единственное число  $H > 0$ , для которого  $b = a^H$ . Следовательно, в этом случае,  $X(at) \stackrel{d}{=} a^H X(t)$ .

Пусть случайный процесс  $X$  имеет стационарные приращения с конечной дисперсией  $\sigma^2$ . Ковариационная функция  $\gamma(t, s) = cov(X(t), X(s))$  процесса  $X$  имеет вид

$$\gamma(t, s) = 1/2 \cdot \sigma^2 (t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H}), \quad s < t, \quad 0 < H < 1. \quad (1)$$

Принимая во внимание цифровой и пакетный характер современных сетей связи, также будем рассматривать процессы с дискретным временем. Ковариационная и корреляционная функции процесса приращений  $\{\xi(n) = X(n+1) - X(n)\}_{n=0,1,2,\dots}$  при  $n \geq 0$  будут равны соответственно

$$\gamma(n) = \frac{\sigma^2}{2} [(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}], \quad \rho(n) = \frac{1}{2} [(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}],$$

При  $n < 0$  мы имеем  $\gamma(n) = \gamma(-n)$ ,  $\rho(n) = \rho(-n)$ . Заметим, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\rho(n) \sim H(2H - 1)n^{2H-2} = c \cdot n^{-\beta}, \quad 0 < \beta = 2 - 2H < 1. \quad (2)$$

**Определение 2.** Говорят, что процесс  $X$  имеет *долгую память*, если  $\rho(n) \sim n^{-\beta} \cdot L(n)$ ,  $0 < \beta = 2 - 2H < 1$ , где функция  $L(n)$  медленно меняется на бесконечности. Процесс  $X$  имеет *короткую память*, если  $\rho(n) \sim n^{-\beta} \cdot L(n)$   $1 < \beta < 2$ ;  $n \rightarrow \infty$  или если существуют постоянные  $0 < a < 1$  и  $0 < b < \infty$  такие, что  $|\rho(n)| \leq ba^n$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть  $X^{(m)} = \{X_t^{(m)} : t \in N\}$ , где  $X_t^{(m)} = m^{-1} \cdot (X_{tm-m+1} + \dots + X_{tm})$   $m = 1, 2, \dots$  это усредненный по блокам длины  $m$  (агрегированный) случайный процесс  $X$ . Обозначим через  $\rho_m(k)$  коэффициент корреляции процесса  $X^{(m)}$ .

**Определение 3.** Процесс  $X$  называется *строго самоподобным в широком смысле* с параметром  $0 < H < 1$ , если для любых  $k \in N$  имеет место  $\rho_m(k) = 1/2 \cdot [(k+1)^{2-\beta} - 2k^{2-\beta} + (k-1)^{2-\beta}] := g(k)$ .

**Определение 4.** Процесс  $X$  называется *асимптотически самоподобным* в широком смысле с параметром  $0 < H < 1$ , если  $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m(k) = g(k)$ ,  $k \in N$ .

Примерами самоподобных процессов являются дробное броуновское движение и  $\alpha$ -устойчивое движение Леви.

**Определение 5.** Непрерывный гауссовский процесс  $(B_H(t), t \geq 0)$  с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2 = E|B_H(1)|^2$  называется *дробным броуновским движением* с показателем  $0 < H < 1$ , если его ковариационная функция имеет вид  $\gamma(t, s) = 1/2 \cdot \sigma^2 \{t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\}$ .

$B_H(t)$  — самоподобный процесс с показателем  $H$ . Если  $H = 1/2$ , то  $B_H(t)$  есть обычный винеровский процесс.

**Определение 6.** Случайный процесс  $(X(t), t \geq 0)$  называется *процессом Леви*, если выполнены условия: 1)  $X(0) = 0$  п.н.; 2)  $X(t)$  — процесс с независимыми и однородными приращениями; 3)  $X(t)$  — стохастически непрерывен; 4) траектории  $X(t)$  непрерывны справа и имеют конечные пределы слева при  $t > 0$ .

**Определение 7.** Случайный процесс  $X_{\alpha, \sigma, \beta}(t)$ ,  $X \geq 0$ , где  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\sigma \geq 0$  называется  *$\alpha$ -устойчивым движением Леви*, если он имеет независимые и стационарные приращения с  $\alpha$ -устойчивым распределением.

$\alpha$ -устойчивое движение Леви — самоподобный процесс с параметром  $H = 1/\alpha$ . При  $\alpha = 2$  мы имеем броуновское движение. Для  $0 < \alpha < 2$  вторые моменты процесса  $X$  бесконечны.

**Определение 8.** Случайная величина  $Z$  имеет *распределение с тяжелым хвостом*, если  $P(Z > x) \sim c \cdot x^{-\alpha}$ ,  $x \rightarrow \infty$ , где  $c > 0$  — некоторая постоянная,  $0 < \alpha < 2$  — параметр формы распределения.

Если  $0 < \alpha \leq 1$ , то  $E(Z) = \infty$ ,  $D(Z) = \infty$ , если  $1 < \alpha \leq 2$ , то  $E(Z) < \infty$  и  $D(Z) = \infty$ .

В параграфе 3 описаны модели, порождающие самоподобный трафик и область их возможного применения.

Наиболее известными моделями, приводящими к самоподобному потоку являются однородные *ON/OFF модель* и *модель Пуассона с бесконечным числом источников*, которые рассматривались в работе Т. Микоша (Mikosch T., Resnick S., Rootzén H., Stegeman A. *Is network traffic approximated by stable Lévy motion or fractional brownian motion?* Ann. Appl. Probab., 12(1), 2002, pp. 23–68). Их отличительная особенность — наличие тяжелых хвостов у распределений длин периодов занятости/покоя в *ON/OFF* модели и длин сообщений в модели Пуассона. В рамках данных моделей было показано, что предельными процессами для агрегированных потоков нагрузки в режимах «Fast Grows Condition» (*FGC*) и «Slow Growth Condition» (*SGC*) являются соответственно дробное броуновское движение и  $\alpha$ -устойчивое движение Леви с  $1 < \alpha < 2$ . Дробное броуновское движение — самоподобный процесс с *долгой памятью*, процесс Леви — самоподобный процесс с независимыми приращениями, то есть с *короткой памятью*. Б.С. Цыбаковым (Tsybakov B., Georganas N. D. *Overflow and losses in a*



network queue with a self-similar input. *Queueing Syst.* 35, 2000, pp. 201–235) был рассмотрен дискретный аналог модели Пуассона и предложена модель входящего потока, приводящая к асимптотически самоподобному процессу.

В данной диссертации упомянутые модели и результаты являются отправной точкой для построения более сложных моделей трафика и исследования их свойств.

**Вторая глава** посвящена исследованию свойств процесса нагрузки в *ON/OFF* модели с неоднородными источниками.

В параграфе 1 предложена неоднородная *ON/OFF* модель, построенная с учетом того что доли источников разных типов в общем потоке различны. В рамках предложенной модели найден предельный процесс для агрегированного процесса нагрузки.

Пусть в СМО есть независимые *ON/OFF* источники  $2 \leq r < \infty$  различных типов. Каждый источник генерирует пакеты с постоянной скоростью  $u > 1$  в течение своего *ON* периода, в течение *OFF* периода  $u = 0$ . Иными словами, это процесс восстановления, порожденный чередованием *ON/OFF* периодов.

Для любого  $k = \overline{1, r}$  длины  $X_{on}^{(k)}, X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots$  и  $Y_{off}^{(k)}, Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \dots$  *ON* и *OFF* периодов есть независимые с.в., независимые друг от друга, имеющие соответственно распределения  $F_1^{(k)}$  и  $F_2^{(k)}$  с правильно меняющимися хвостами, то есть:

$$\bar{F}_1^{(k)}(x) = x^{-\alpha_1^{(k)}} L_1^{(k)}(x), \quad \bar{F}_2^{(k)}(x) = x^{-\alpha_2^{(k)}} L_2^{(k)}(x), \quad x > 0, \quad (3)$$

где  $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)} \in (1, 2)$ ,  $\alpha_1^{(k)} < \alpha_2^{(k)}$  и  $L_1^{(k)}, L_2^{(k)}$  есть медленно меняющиеся на бесконечности функции. Заметим, что распределения  $F_1^{(k)}$  и  $F_2^{(k)}$  имеют конечные средние  $\mu_1^{(k)}$  и  $\mu_2^{(k)}$ , но их дисперсии — бесконечны. Положим  $\mu^{(k)} = \mu_1^{(k)} + \mu_2^{(k)}$ .

Для любого  $k = \overline{1, r}$  и  $n \geq 1$  определим стационарную последовательность восстановлений  $\{T_n^{(k)}\}$  по правилу:

$$\begin{aligned} T_n^{(k)} &= T_0^{(k)} + \sum_{i=1}^n (X_i^{(k)} + Y_i^{(k)}), \\ T_0^{(k)} &= B^{(k)} \cdot (X_{on,(0)}^{(k)} + Y_{off}^{(k)}) + (1 - B^{(k)}) \cdot Y_{off,(0)}^{(k)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где взаимонезависимые с.в.  $B^{(k)}, X_{on,(0)}^{(k)}, Y_{off,(0)}^{(k)}$  не зависят от  $\{Y_{off}^{(k)}, (X_n^{(k)}), (Y_n^{(k)})\}$ , с.в.  $B^{(k)}$  имеет распределение Бернулли с  $P(B^{(k)} = 1) = \mu_1^{(k)}/\mu^{(k)}$ , а  $X_{on,(0)}^{(k)}$  и  $Y_{off,(0)}^{(k)}$  есть с.в. с функциями распределения  $F_{1,(0)}^{(k)}(x) = 1/\mu_1^{(k)} \int_0^x \bar{F}_1^{(k)}(s) ds$  и  $F_{2,(0)}^{(k)}(x) = 1/\mu_2^{(k)} \int_0^x \bar{F}_2^{(k)}(s) ds$  соответственно.

*ON/OFF* процесс для одного источника типа  $k$  имеет вид:

$$W_t^{(k)} = u \cdot \left( B^{(k)} \cdot 1_{[0, X_{on,(0)}^{(k)})}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[T_n^{(k)}, T_n^{(k)} + X_{n+1}^{(k)})}(t) \right), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Для любого  $k$  с.в.  $W_t^{(k)} = u$ , если  $t$  попадает на *ON*-период и  $W_t^{(k)} = 0$  иначе. Процесс  $W^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, r}$  строго стационарен со средним  $E(W_t^{(k)}) = u \cdot \mu_1^{(k)}/\mu^{(k)}$  и ковариационной

функцией  $\gamma_W^{(k)}(s) \sim c s^{-\alpha_1^{(k)}+1} L_1^{(k)}(s)$  при  $s \rightarrow \infty$ . Таким образом процесс  $W^{(k)}$  имеет *долгую память*.

Интенсивность входящего потока для сервера в момент  $t \geq 0$  (число активных источников) равна  $N(t) = N_M(t) = \sum_{k=1}^r \sum_{m=1}^{M^{(k)}} W_{t,m}^{(k)}$ , где  $M^{(k)}$  есть число появлений распределения  $k$ -го типа среди  $M = \sum_{k=1}^r M^{(k)}$  первых членов последовательности процессов  $W^{(k)}$ .

Определим полную входящую работу к моменту времени  $t$

$$A(t) = A(M, t) = \int_0^t N(s) ds, \quad t \geq 0 \quad (6)$$

и семейство агрегированных процессов нагрузки

$$A(M, T, t) := A(M, T \cdot t), \quad T > 0. \quad (7)$$

Пусть  $\alpha_1^{(1)} < \alpha_1^{(2)} < \dots < \alpha_1^{(r)}$ , и  $M^{(k)}(T) \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow \infty$  для всех  $k$ . Непрерывная слева обобщенная обратная к функции  $1/\bar{F}_1^{(k)}$  функция  $b^{(k)}(t) = \inf\{x > 0 : 1/\bar{F}_1^{(k)}(x) \geq t\}$  правильно меняется с показателем  $1/\alpha^{(k)}$ , следовательно  $b^{(r)}(t) = t^{1/\alpha^{(r)}} \cdot L_0(t)$ , где  $L_0(t)$  — медленно меняющаяся функция. Далее *рассматривается только случай SGC*:  $b^{(k)}(M^{(k)}(T)T)/T \rightarrow 0$ .

Определим целочисленные функции  $M^{(k)}(T)$  по правилу: при  $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} M^{(k)}(T) &\sim c^{(k)} \cdot \frac{(MT)^{\alpha^{(k)}/\alpha^{(r)}} [L_0(MT)]^{\alpha^{(k)}}}{T \cdot [L^{(k)}(b^{(r)}(MT))]}, \quad c^{(k)} > 0, \quad k < r, \\ M^{(r)}(T) &= M(T) - M^{(1)}(T) - \dots - M^{(r-1)}(T). \end{aligned} \quad (8)$$

В этом случае  $M^{(r)}/M(T) \rightarrow 1$ ,  $M^{(k)}(T)/M(T) \rightarrow 0$ ,  $k < r$  при  $T \rightarrow \infty$ .

*Ставится задача нахождения предельного распределения для процесса агрегированной нагрузки  $A(M, Tt)$  при  $T \rightarrow \infty$  и  $M^{(k)}(T) \rightarrow \infty$ , описанным выше способом.*

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Если  $F_1^{(k)}$  и  $F_2^{(k)}$  удовлетворяют условию (3) и режим *SGC* выполняется для всех  $k$  и  $M^{(k)}(T)$ , определенных в (8), то при некоторой нормировке предельный процесс для  $A(M, Tt)$  существует и является суммой независимых устойчивых движений Леви с показателями  $\alpha_1^{(1)} < \alpha_1^{(2)} < \dots < \alpha_1^{(r)}$ .

В параграфе 2 обоснована возможность замены случайного индекса в сумме независимых с.в. на его среднее значение в доказательстве теоремы 1. *Полученный результат имеет и самостоятельный интерес в теории случайных сумм.*

Пусть  $(X_j^{(k)}, j \geq 1)$  есть последовательность н.о.р.с.в., функции распределения  $F^{(k)}(x) = P(X_j^{(k)} < x)$  которых принадлежат множеству  $\mathcal{F} = \{F^{(1)}, \dots, F^{(r)}\}$ , состоящему из  $2 \leq r < \infty$  разных распределений. Обозначим через  $m^{(k)}(n)$  число слагаемых в сумме, имеющих распределение  $F^{(k)}$ . Предположим, что последовательности  $\{X_j^{(k)}\}$

независимы для всех  $k = \overline{1, r}$  и  $\mu_k = E(X_j^{(k)}) < \infty$ . Допустим также, что существует последовательность положительных чисел  $B_n$  такая, что  $B_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$  и

$$S_n^* := B_n^{-1} \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{m_k} (X_j^{(k)} - \mu_k) \Rightarrow Y, \quad (9)$$

где  $Y$  — невырожденная с.в. с распределением  $G$ . Мы рассматриваем случай, когда распределение  $G$  есть свертка  $r$  устойчивых законов с разными индексами  $\alpha^{(k)}$ .

Пусть  $\{N_n^{(1)}\}, \dots, \{N_n^{(r)}\}$  есть независимые последовательности положительных целочисленных с.в., определенных на том же вероятностном пространстве, что и  $(X_j^{(k)})$  и, возможно, зависимых от них.

Положим

$$Z_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^r \left( \sum_{j=1}^{N_n^{(k)}} (X_j^{(k)} - m_k \cdot \mu_k) \right) = T_n + U_n, \quad (10)$$

$$T_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{N_n^{(k)}} (X_j^{(k)} - \mu_k); U_n^{(k)} = B_n^{-1} (N_n^{(k)} - m_k) \cdot \mu_k; U_n = \sum_{k=1}^r U_n^{(k)}. \quad (11)$$

Основной результат данного параграфа представлен в виде теоремы 2.

**Теорема 2.** Если  $\mu^{(k)} \neq 0$  и  $U_n^{(k)} \xrightarrow{d} U^{(k)}, n \rightarrow \infty, k = \overline{1, r}, U = \sum_{k=1}^r U^{(k)}$ , тогда

$Z_n \Rightarrow Z, n \rightarrow \infty$  и с.в.  $Z$  допускает представление  $Z \stackrel{d}{=} Y + U$ , где  $Y$  и  $U$  независимы.

Полученный результат обобщает выводы из работы Е. В. Рыбко (Рыбко Е. В. *Асимптотические свойства случайных сумм независимых случайных величин.* — Канд. дисс. М.: МГУ, 1994, 139 с.)

**Третья глава** посвящена анализу характеристик  $QoS$  в СМО с самоподобными и мультифрактальными входящими потоками.

В параграфе 1 приводятся примеры основных характеристик  $QoS$ .

Эффективное обслуживание трафика не возможно без учета его свойств. Однако сложная структура и высокая неоднородность в плане требований к параметрам сети современных потоков данных способны неограниченно расширить круг «главных» характеристик  $QoS$ . Поэтому проектировщики систем выделяют три основных показателя  $QoS$ , связанных с процессом буферизации данных, которые важны для потока с любыми свойствами: *вероятность переполнения буфера, вероятность потери пакета*, а также *вариацию задержки пакета*. В данной работе в качестве основных параметров  $QoS$  рассматриваются вероятности переполнения буфера и потери пакета.

В параграфе 2 сравнивается асимптотическое поведение вероятности переполнения буфера в моделях с марковскими и самоподобными (дробное броуновское движение и  $\alpha$ -устойчивый процесс Леви) входящими потоками. Также рассматриваются *верхние и нижние асимптотические границы* для вероятностей переполнения буфера и потери пакета, полученные Б.С. Цыбаковым для СМО с асимптотически самоподобным трафиком.

В параграфе 3 мы анализируем поведение вероятностей переполнения буфера и потери пакета в СМО с неоднородными источниками, когда каждый из них способен нетривиальным образом влиять на поведение системы.

**ON/OFF модель с неоднородными источниками.** Рассматривается СМО, имеющая буфер размера  $h < \infty$ , на вход которой поступает поток  $W_t$ , порождаемый одним источником, попеременно находящимся в *ON* и *OFF* состоянии. Структура рассматриваемого потока определена в (5). Длина  $X_n^*$  активного периода имеет распределение

$$F_1 = \sum_{k=1}^r \lambda^{(k)}(T) \cdot F_1^{(k)} = \sum_{k=1}^r M^{(k)}(T)/M(T) \cdot F_1^{(k)}. \quad (12)$$

Аналогично определяется распределение  $F_2$  длины  $Y_n^{(*)}$  периода покоя. Без ограничения общности предположим, что буфер освобождается с постоянной скоростью, равной 1.

*Ставится задача нахождения асимптотики для вероятности переполнения буфера в рассматриваемой СМО.*

Обозначим через  $Z(t)$  и  $A_n = (r - 1) \cdot X_n^{(*)}$  величины заполнения буфера в момент  $t$  и в течение  $n$ -го активного периода соответственно. Тогда величины  $\{W_n = Z(T_n), n \geq 1\}$ , где  $\{T_n, n \geq 0\}$  есть определенный в (4) стационарный процесс восстановления, удовлетворяют уравнению Линдли:  $W_{n+1} = [W_n + A_n - Y_n^{(*)}]^+$ , где  $(x)^+ = \max(0, x)$ .

Обозначим  $m_1 = m_1(T) = M(A_n)$ ,  $m_2 = m_2(T) = M(Y_n^{(*)})$ . Известно, что если  $m_1/m_2 < 1$ , то  $W_n \Rightarrow W$  при  $n \rightarrow \infty$ , причем с.в.  $W$  имеет распределение  $P(W > x) = (1 - \theta) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \cdot P(V_1 + \dots + V_k > x)$ , где  $(V_k, k \geq 1)$  есть последовательность н.о.р.с.в. — «возрастающих лестничных высот», построенных по последовательности  $(A_n - Y_n^{(*)}, n \geq 1)$ , и  $0 < \theta < 1$ .

*Основной результат для данной модели представлен в виде теоремы 3.*

**Теорема 3.** Если хвосты распределений  $F_1^{(k)}$  и  $F_2^{(k)}$  удовлетворяют условию (3), а величины  $M^{(k)}$  выбраны по правилу (8), то справедливо соотношение

$$P(W > h) \sim (1 - \theta)/\theta \cdot P(V_1 > h) \sim (1 - \theta)/\theta \cdot h^{-\alpha_1^{(r)} + 1} \cdot L^{(*)}(h), \quad h \rightarrow \infty, \quad (13)$$

где  $L^{(*)}(x)$  есть медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Выбирая подходящим образом частоты  $M^{(k)}/M$  появления активных периодов с разными распределениями, можно получить скорость убывания вероятности переполнения с любым показателем  $\alpha_1^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, r}$  (в данном случае с  $\alpha_1^{(r)}$ ).

**Модель Пуассона с неоднородными источниками.** Источники подают нагрузку на один сервер, имеющий буфер размера  $h > 0$  и скорость обслуживания  $r_2 = 1$ . В активном периоде источники генерируют пакеты со скоростью  $r_1 = 1$ .

Длины активных периодов есть независимые с.в., распределения которых принадлежат множеству  $\mathcal{F} = \{F^{(1)}, \dots, F^{(r)}\}$ , состоящему из  $2 \leq r < \infty$  различных законов таких, что  $\bar{F}^{(k)}(x) = x^{-\alpha^{(k)}} L^{(k)}(x)$ ,  $k = \overline{1, r}$ , где  $1 < \alpha^{(1)} < \dots < \alpha^{(r)} < 2$  и функции  $L^{(k)}(x)$  — медленно меняются на бесконечности.

Число источников  $N(t)$ , активных в момент  $t$ , имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda^{(i)}$ , где  $\lambda^{(i)}/\lambda$  — доля распределения  $F^{(i)}$  в общем потоке.

Рассмотрим смешанное распределение

$$F(x) = \sum_{k=1}^r \lambda^{(k)}/\lambda \cdot F^{(k)}(x) = \sum_{k=1}^r d^{(k)} F^{(k)}(x), \quad (14)$$

$$\text{Положим } F_0(x) = \mu_F^{-1} \int_0^x \bar{F}(y) dy, \quad \mu_F = \int_0^\infty x dF(x).$$

Ставится задача нахождения асимптотика для вероятности переполнения буфера в рассматриваемой СМО.

Пусть  $(X_j, j \geq 1)$  это последовательность н.о.р.с.в., имеющих распределение  $F$ , и  $S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j - t$ . Вероятность переполнения буфера равна  $P_{over}(h) = P(\sup_{t>0} S(t) > h)$ .

Положим  $h = h(T)$  и  $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)}(T)$ , где  $T > 0$  есть некоторый параметр. Для любого  $0 < b^{(k)} < \infty$ ,  $k = \overline{1, r-1}$  определим доли  $\lambda^{(k)}(T)$  по правилу:

$$\lambda^{(k)}(T) = \frac{\lambda b^{(k)} h(T)^{-(\alpha^{(r)} - \alpha^{(k)})} L^{(r)}(h(T))}{L^{(k)}(h(T))}, \quad k \neq r; \quad \lambda^{(r)}(T) = \lambda - \sum_{i=1}^{r-1} \lambda^{(i)}(T). \quad (15)$$

Легко видеть, что  $\lambda^{(k)}(T) \rightarrow 0$ ,  $k = \overline{1, r-1}$  и  $\lambda^{(r)}(T) \rightarrow \lambda$  при  $T \rightarrow \infty$ .

Основной результат для данной модели представлен в виде теоремы 4.

**Теорема 4.** Если  $h(T) \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow \infty$ , величины  $\lambda^{(k)}(T)$  удовлетворяют условию (15) и  $\lambda \cdot \mu_F < 1$ , то  $P_{over}(h(T)) \sim \rho^{(r)}/(1 - \rho^{(r)}) \bar{F}_0(h(T))$ . (16)

То есть, при соответствующем подборе весов любое распределение из множества  $\mathcal{F}$  может вносить нетривиальный вклад в вероятность переполнения буфера.

**Модель Б.С. Цыбакова с неоднородными источниками (неоднородная модель Пуассона в дискретном времени).** Рассматривается одноканальная СМО вида  $Y^*/D/C/h$ , функционирующая в дискретном времени, где  $Y^*$  есть входящий поток,  $D$  — время обслуживания пакета,  $C$  — пропускная способность канала (в пакетах) и  $h$  — размер буфера (в пакетах). Пусть  $Z_t$  — число пакетов в буфере в момент  $t$ . Введем класс дисциплин обслуживания  $D(h)$ , такой что: 1) если  $Y_t + Z_t > 0$ , то  $\min\{Y_t + Z_t, 1\}$  пакетов попадает в канал в момент  $t$ ; 2) если  $Y_t + Z_t \leq h + 1$ , то ни одна ячейка не теряется в момент  $t$ ; 3) если  $Y_t + Z_t > h + 1$ , то  $Y_t + Z_t - h - 1$  пакетов теряется в момент  $t$ . Какие пакеты обслуживаются, а какие теряются, определяется дисциплиной  $d \in D(h)$  и на дальнейшие рассуждения не влияет. Пусть  $C = 1$  и на обслуживание пакета тратится 1 единица времени.

В СМО источники могут быть  $2 \leq r < \infty$  разных типов. Источник типа  $k$  характеризуется своей длиной активного периода  $\tau^{(k)}$ , которая имеет дискретное распределение Парето с параметром  $\alpha^{(k)}$ ,  $1 \leq k \leq r$ :

$$P(\tau^{(k)} = n) = c_0^{(k)} n^{-\alpha^{(k)} - 1}, \quad k = \overline{1, r}; \quad 1 < \alpha^{(1)} < \dots < \alpha^{(r)} < 2 \quad (17)$$

и генерирует пакеты в активном периоде с постоянной скоростью  $R = 1$ .

Пусть с.в.  $\{\xi_t^{(i)}\}$ , где  $\xi_t^{(i)}$  есть количество источников типа  $i$ , «проснувшихся» в момент  $t$ , независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами  $\lambda^{(i)}, i = \overline{1, r}$ . С.в.  $\xi_t = \sum_{i=1}^r \xi_t^{(i)}$ , также имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda^{(i)}$ .

Входящий поток  $Y_t^* = \sum_{i=1}^r Y_t^{(i)}$  — суперпозиция независимых процессов  $Y^{(k)}$ , где с.в.  $Y_t^{(k)}$  есть количество активных источников типа  $k$  в момент  $t$ . Для любого  $k = \overline{1, r}$  при фиксированном  $t$  с.в.  $Y_t^{(k)}$  имеет распределение Пуассона со средним  $\lambda^{(k)} E\tau^{(k)}$ . Корреляционная функция потока имеет вид:  $\rho^{(k)}(l) \sim c^{(k)} l^{-\alpha^{(k)}+1}, l \rightarrow \infty$ , то есть  $Y^{(k)}$  есть процесс с долгой памятью. Процесс агрегированной нагрузки, порождаемой источниками типа  $k$  является в этих условиях асимптотически самоподобным.

Предположим, что трафик  $Y^*$  порождается источниками одного типа, имеющими смешанное распределение. Для этого введем с.в.  $\xi^*$  и  $\tau^*$ , распределения которых  $P(\xi^* = m) = \sum_{k=1}^r d^{(k)} P(\xi^{(k)} = m)$  и  $P(\tau^* = x) = \sum_{k=1}^r d^{(k)} P(\tau^{(k)} = x)$  есть смесь распределений с.в.  $\xi^{(k)}$  и  $\tau^{(k)}$  соответственно, взятых с весами  $d^{(k)}$ .

Выберем веса  $d^{(k)} = \lambda^{(k)}/\lambda$  следующим образом

$$d^{(k)} = h^{\alpha^{(k)} - \alpha^{(r)}}, \quad k = \overline{1, r-1}; \quad d^{(r)} = 1 - d^{(1)} - \dots - d^{(r-1)}. \quad (18)$$

Легко видеть, что  $d^{(k)} \rightarrow 0, k = \overline{1, r-1}$  и  $d^{(r)} \rightarrow 1$  при  $h \rightarrow \infty$ .

Ставится задача нахождения асимптотических границ для вероятностей переполнения буфера и потери пакета в системе  $Y^*/D/1/h$ .

Справедлива следующая

**Теорема 5.** В модели  $Y^*/D/1/h$  для вероятностей переполнения буфера и потери пакета в стационарном режиме при  $h \rightarrow \infty$  верны асимптотические границы:

$$\tilde{c}_1 \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1} \leq P_{over} \leq \tilde{c}_2 \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1}, \quad \tilde{b}_1 \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1} \leq P_{loss} \leq \tilde{b}_2 \cdot h^{-\alpha^{(r)}+1}, \quad (19)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{(E\tau^{(r)} + E\kappa)^2} \sum_{k=1}^r \frac{c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)}, \quad \tilde{c}_2 = \frac{\lambda}{(1 - \lambda E\tau^{(r)})} \sum_{k=1}^r \frac{c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)}; \quad (20)$$

$$\tilde{b}_1 = \frac{(\lambda E\tau^{(r)})^{-1}}{(E\tau^{(r)} + E\kappa)^{\alpha^{(r)}+1}} \sum_{k=1}^r \frac{c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{(E\tau^{(r)})^{-1}}{(1 - \lambda E\tau^{(r)})} \sum_{k=1}^r \frac{c_0^{(k)}}{\alpha^{(k)}(\alpha^{(k)} - 1)}. \quad (21)$$

и  $E\kappa = [1 - e^{-\lambda}]^{-1} - 1$ .

Варьируя доли источников разных типов в общем потоке, можно показать, что *любой из них нетривиально влияет* на вероятности переполнения буфера и потери пакета. Данные границы обобщают результаты Б.С. Цыбакова, полученные для однородного случая ( $r = 1$ ).

**В четвертой главе** описывается имитационная модель для СМО  $Y^*/D/1/h$  и анализируется качество оценок для вероятности переполнения буфера.

В параграфе 1 обоснована необходимость применения имитационного моделирования для изучения свойств оценок вероятностей переполнения буфера в модели Цыбакова Б.С. с неоднородными источниками.

Во-первых константы  $\tilde{c}_1$  и  $\tilde{c}_2$  в оценках вероятности переполнения буфера могут различаться в десятки и сотни раз. Так например, для СМО с параметрами  $\{\alpha^{(1)} = 1.1, \alpha^{(2)} = 1.3, \alpha^{(3)} = 1.5; \lambda = 0.5\}$  и  $\{\alpha^{(1)} = 1.1, \alpha^{(2)} = 1.8; \lambda = 0.4\}$  соотношения констант составят  $\tilde{c}_2/\tilde{c}_1 = 428.86$  и  $\tilde{c}_2/\tilde{c}_1 = 43.895$  соответственно. Во-вторых эти оценки являются асимптотическими и нет точного указания на то, начиная с каких значений  $h$  интервал  $[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2]$  является адекватным. Поэтому нас интересует для каких  $h$  «истинная» константа  $c_{over} = P_{over}/h^{-\alpha+1}$  попадает в указанные границы и где именно она располагается в интервале  $[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2]$ . Для этого необходимо найти «истинную» константу в предложенной асимптотике и сравнить ее с граничными значениями. Для уточнения значения константы в среде *Matlab* была разработана имитационная модель системы  $Y^*/D/1/h$ .

В параграфе 2 обосновывается невозможность применения стандартного метода Монте-Карло (ММК) для анализа *редких событий* и описывается метод ускоренной симуляции, используемый в данной имитационной модели.

Для надежной работы современных систем связи вероятность потери информации должна быть мала. Событие  $A$ , вероятность которого  $\gamma \approx 0$  называют *редким*.

Несмещенной оценкой вероятности  $\gamma$  по ММК будет величина  $\hat{\gamma}_{MC} = n^{-1} \sum_{k=1}^n 1(X_k \in A)$ , где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  есть  $n$  независимых траекторий изучаемой системы. При  $\gamma \rightarrow 0$  относительная ошибка оценки  $RE(\hat{\gamma}_{MC}) = (n\gamma)^{-1/2} \cdot \sqrt{1-\gamma} \approx (n\gamma)^{-1/2} \rightarrow \infty$ . Кроме того, пусть например,  $\gamma = 10^{-9}$ , тогда минимальное число траекторий, необходимых для достижения точности  $r = 0.01$  равно  $n^* \approx (r^2\gamma)^{-1} \approx 10^{13}$ . Этот пример показывает, что при  $\gamma \rightarrow 0$  требуется огромный размер выборки, и моделирование в таких условиях может занимать от нескольких часов до многих лет. Поэтому, при моделировании редких событий нужно использовать более эффективные методы, например, *методы ускорения симуляции*.

Пусть случайный процесс  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  с пространством состояний  $\mathcal{X}$  и начальным значением  $X_0, X_0 \in \mathcal{X}$ , описывает функционирование некоторой СМО. Будем рассматривать процесс очереди  $\{f(X_t) = Z_t, t \geq 0\}$ , где  $Z_t$  есть число необслуженных заявок в системе в момент  $t$ . Определим множества  $A = \{x \in \mathcal{X} : f(x) > L\}$  и  $B = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq 0\}$ , где  $L = h + 1$  и  $h$  есть размер буфера. Положим  $f(X_0) \notin A$  и  $f(X_0) \in B$ .

Обозначим через  $\tau_A = \inf\{t > 0 : Z_t > L\}$  и  $\tau_B = \inf\{t > 0 : Z_t = 0\}$  моменты первого попадания в область  $A$  и первого возвращения в область  $B$ . С.в.  $\tau_B$  также есть *длина цикла регенерации*.

Вероятность  $\gamma(L)$  переполнения буфера на 1 цикле регенерации равна

$$\gamma(L) = P(\tau_A < \tau_B) = P(\max_{0 \leq t < \tau_B} \{Z_t\} > L).$$

Вероятность  $\gamma_S(L)$  переполнения буфера в стационарном режиме определяется по формуле:  $\gamma_S(L) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Z_t > L) = \gamma(L) E(T|T > 0)/E(\tau_B)$ , где  $T$  — время, в течение которого буфер был переполнен.

В настоящее время для моделирования редких событий, широко применяется *метод расщепления*. Метод заключается в разбиении пространства состояний изучаемого процесса на непересекающиеся области  $D_k$ , таким образом, что достижение области  $D_k$  из области  $D_{k-1}$  не является редким событием. Траектория достигнувшая новой области, расщепляется на несколько копий, которые развиваются дальше вместе с основной траекторией, и, таким образом, увеличивается вероятность достижения множества  $A$ . Границы  $\{L_i : 0 = L_0 < L_1 < \dots < L_m = L\}$  областей называются *уровнями* или *порогами*. Между порогами моделирование осуществляется согласно обычному ММК.

Оценка вероятности переполнения в цикле строится по правилу:

$$\hat{\gamma}(L) = \prod_{k=1}^m \hat{p}_k = R_1/N_0 \cdot R_2/N_1 \cdot \dots \cdot R_m/N_{m-1},$$

где  $R_k$  есть число траекторий, стартовавших из  $D_{k-1}$  и достигших  $D_k$ ,  $N_{k-1} > R_{k-1}$  — общее число траекторий, стартовавших на уровне  $D_{k-1}$ ,  $\hat{p}_k = R_k/N_{k-1}$  — оценка условной вероятности  $p_k = P(D_k|D_{k-1})$ .

Обозначим через  $\hat{E}T_L$ ,  $\hat{E}\tau$  и  $\hat{E}T$  оценки для среднего времени переполнения, средней длины цикла регенерации и величины  $E(T|T > 0)$  соответственно. Тогда

$$\hat{\gamma}_S(L) = \hat{E}T_L/\hat{E}\tau = \hat{\gamma}(L) \cdot \hat{E}T/\hat{E}\tau.$$

Для получения оценки  $\hat{E}T_L = \hat{\gamma}(L) \cdot \hat{E}T$  в метод расщепления добавим еще один шаг, на котором будем оценивать время переполнения, вместо условной вероятности достижения следующего уровня.

Метод дает несмещенную оценку искомой вероятности и, при правильном выборе параметров, его относительная ошибка во много раз меньше, чем у ММК.

**Основная проблема** при реализации *метода расщепления* заключается в определении числа уровней  $m$  и порогов  $L_i, i = \overline{1, m-1}$ . Оптимальный выбор параметров (М. Garvels, 2000) возможен лишь в СМО вида  $M/M/1$ , когда для  $\gamma$  можно получить *аналитическое решение*. В общем случае задать априори параметры метода невозможно. В нашей модели пороги определяются рекурсивно (F. Serou et al., 2005) по максимальным (минимальным) значениям процесса очереди, достигнутым на траекториях системы на каждом шаге. Траектории, не достигнувшие текущего порога, случайным образом замещаются на одну из «удачных» траекторий. Моделирование продолжается до достижения уровня  $L = h + 2$  ( $L_0 = 0$ ). Такой алгоритм обычно не дает оптимальные число и значения порогов, но позволяет учитывать при их выборе свойства изучаемой системы.

В параграфе 3 описывается имитационная модель системы  $Y^*/D/1/h$  и приводятся результаты ее численного моделирования.



На рисунке 1 приведены оценки констант для вероятности переполнения буфера в системе  $Y^*/D/1/h$  при некоторых значениях исходных параметров. Нижняя  $c_{low}$  и верхняя  $c_{upper}$  горизонтальные линии соответствуют теоретическим границам  $\tilde{c}_1$  и  $\tilde{c}_2$  для «истинной» константы  $c_{over}$ .

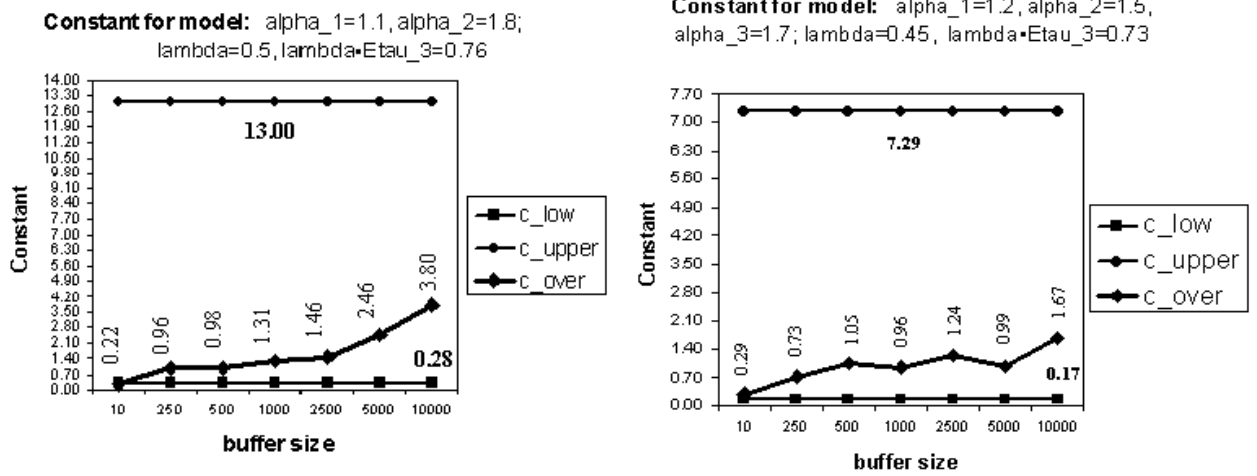


Рис. 1: Константа в оценке вероятности переполнения для систем с  $\{\alpha^{(1)} = 1.1, \alpha^{(2)} = 1.8; \lambda = 0.5\}$  и  $\{\alpha^{(1)} = 1.2, \alpha^{(2)} = 1.3, \alpha^{(3)} = 1.5; \lambda = 0.45\}$

Моделирование показывает, что в области значений параметра  $\lambda$ , при которых величина загрузки  $\rho = \lambda E\tau^{(r)} > 0.7$ , оценка константы  $c_{over}$  лежит в интервале  $[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2]$  ближе к нижней границе при любых рассмотренных  $h$ . При  $\rho < 0.7$  справедлива только верхняя граница для  $c_{over}$ . В этой области значений параметров для нижняя граница для вероятности переполнения не достигается, по крайней мере для конечных  $h$ .

**В заключении** приведен обзор результатов, полученных в данной работе.

1) Построены новые модели трафика, порождаемого источниками, длины активных периодов которых имеют распределения с разной степенью «тяжести» хвоста  $\alpha^{(k)} \in (1, 2)$ ,  $k = \overline{1, r}$ .

2) Для процесса нагрузки в *неоднородной ON/OFF модели* в режиме *SGC* получен новый предельный процесс, являющийся суммой независимых  $\alpha$ -устойчивых движений Леви с разными показателями  $\alpha^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, r}$ .

3) Найдено асимптотическое распределение случайной суммы независимых с.в., распределения которых принадлежат конечному множеству  $\mathcal{F}_0$ , состоящему из  $r$  различных законов. Данный результат применен при нахождении предельного распределения процесса нагрузки в *неоднородной ON/OFF модели*.

4) В *неоднородных ON/OFF модели, модели Пуассона и в непрерывном и дискретном времени* найдена асимптотика/асимптотические границы для вероятности переполнения буфера и указаны условия, при которых каждый источник может нетривиально влиять на эту вероятность. Показано, что вероятность переполнения буфера с ростом его размера убывает степенным образом.

5) С помощью имитационной модели системы  $Y^*/D/1/h$  проведено уточнение константы в оценке вероятности переполнения буфера в *неоднородной модели Пуассона в дискретном времени*.

Полученные результаты обеспечивают развитие математического аппарата теории массового обслуживания применительно к СМО с мультифрактальными потоками и предлагают новые методы исследования в данной области.

### Публикации по теме диссертации

#### в изданиях, рекомендованных ВАК России:

1. Сидорова О.И., Хохлов Ю.С. *Уточнение константы задаче оценки вероятности переполнения буфера*. — Вестник ТвГУ, сер. Прикл. матем., 27(55), вып. 7, 2007, с. 51–60.

2. Сидорова О.И., Хохлов Ю.С. *Вероятность переполнения буфера в модели с различными распределениями длины активных периодов*. — Обозрение прикл. и пром. математики, т. 14, вып. 1, 2007, с. 78–79.

3. Сидорова О. И. *Верхняя и нижняя границы для вероятности потери пакета и вероятности переполнения буфера в модели с неоднородными источниками*. — Вестник ТвГУ, сер. Прикл. матем., 35(95), вып. 4(11), 2008, с. 53–61.

#### в других изданиях:

1. Хохлов Ю.С., Сидорова О.И. *Аппроксимация вероятности переполнения буфера для случая различных распределений длины активных периодов*. — Сложные системы: Обр. инф., моделир. и оптим.: Сб. науч. тр.. Тверь, 2004, вып. 2, с. 68–77.

2. D'Apice C., Khokhlov Yu.S., Manzo R., Sidorova O. I. *Approximation of network traffic by pseudostable Levy motion*. — Trans. of the XXIV International Seminar on Stability Problems for Stoch. Models, Jurmala, Latvia, Sept. 10-17, 2004, pp. 178–184.

3. Галактионова О.В., Жукова Е.А., Сидорова О.И. *Границы для вероятности переполнения буфера сервера в случае конечного числа различных распределений активных периодов*. — Межд. конф. студ. и аспирантов «Ломоносов-2005».

4. D'Apice C., Khokhlov Yu. S., Sidorova O.I. *Bounds to buffer-overflow probability in the case of different distributions of system active periods*. — Trans. of The 5th St. Petersburg Workshop on Simul., St. Petersburg, Russia, June 26–July 2, 2005, pp. 223–226.

5. D'Apice C., Khokhlov Yu. S., Sidorova O.I. *On an extension of class of self-similar processes*. — Trans. of The XXV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Salerno, Italy, Sept. 20–24, 2005, pp. 35–38.

6. D'Apice C., Gargiulo G., Khokhlov Yu., Sidorova O. *Convergence of superpositions of scaled renewal processes with finite number of different distributions*. — J. Math. Sciences, vol. 132, issue 5, feb. 2006, pp. 602-609.

7. D'Apice C., Khokhlov Y., Sidorova O. *Sums of selfsimilar processes as scaling limits*. — Abstr. of 31st International Conference on Stochastic processes and their Application, Paris, July 17–26, 2006, pp. 82.

8. D'Apice C., Khokhlov Yu., Sidorova O. *Asymptotic properties of random sums*. — Trans. of 5th International Conference on Lévy Processes: Theory and Applications, Copenhagen, August 13–17, 2007, pp. 68.

9. D'Apice C., Khokhlov Yu., Sidorova O., Galaktionova O. *Gnedenko problem and extension of class of self-similar processes*. — Trans. of the XXVI International Seminar on Stability Problems, Karmiel, Israel, October 22–26, 2007, pp. 64–76.